

Kinematyka relatywistyczna

Fizyka I (B+C)

Wykład VIII:

- Paradoks bliźniąt
- Relatywistyczny efekt Dopplera

Przypomnienie

Transformacja Lorentza

dla różnicy współrzędnych dwóch wybranych zdarzeń A i B:

przyjmując $c \equiv 1$

$$\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \Delta t' + \gamma \beta \Delta x' \\ \gamma \beta \Delta t' + \gamma \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \beta & 0 & 0 \\ \gamma \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \\ \Delta y' \\ \Delta z' \end{pmatrix}$$

Transformacja odwrotna: $\beta \leftrightarrow -\beta$

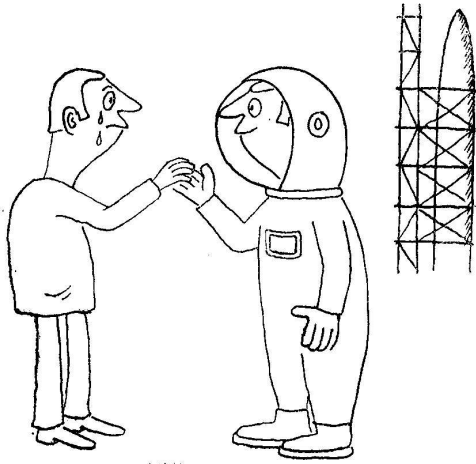
Konsekwencje

- dylatacja czasu $\Delta x' \equiv 0 \Rightarrow \Delta t = \gamma \Delta t'$
- skrócenie Lorentza $\Delta t \equiv 0 \Rightarrow \Delta x' = \gamma \Delta x \Rightarrow \Delta x = \Delta x' / \gamma$

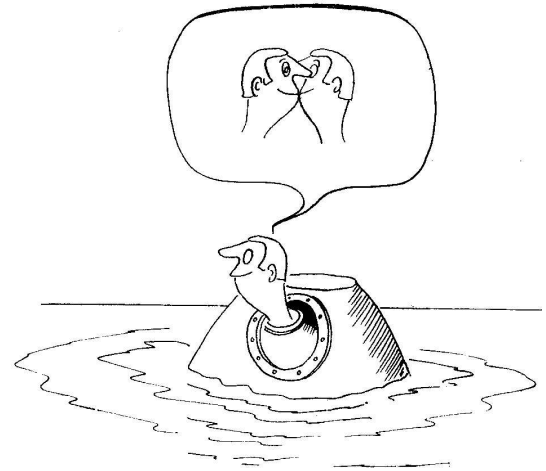
Paradoks bliźniąt

Dwaj bracia - obserwatorzy mierzą czas pomiędzy dwoma zdarzeniami:

wylotem rakiety



powrotem na Ziemię



Poruszają się względem siebie z prędkością porównywalną z prędkością światła

⇒ każdy z nich stwierdzi, że jego brat powinien być **młodszy** (dylatacja czasu)

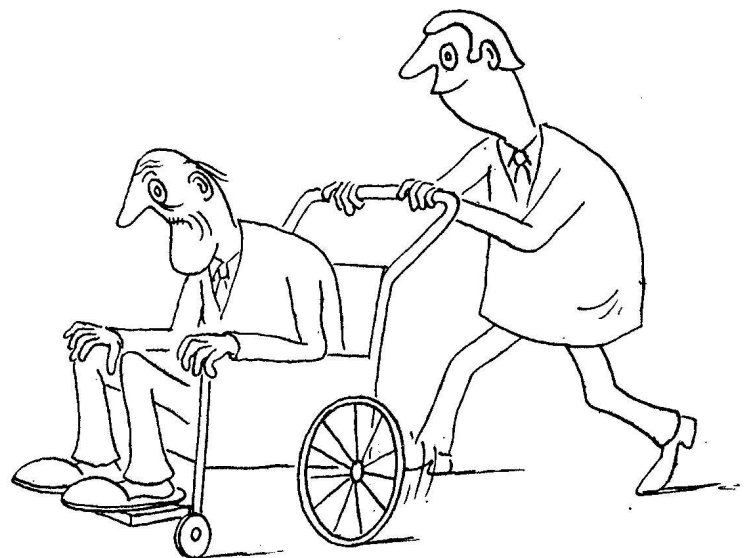
Paradoks bliźniąt

Ale dla obu z nich oba zdarzenia zaszły

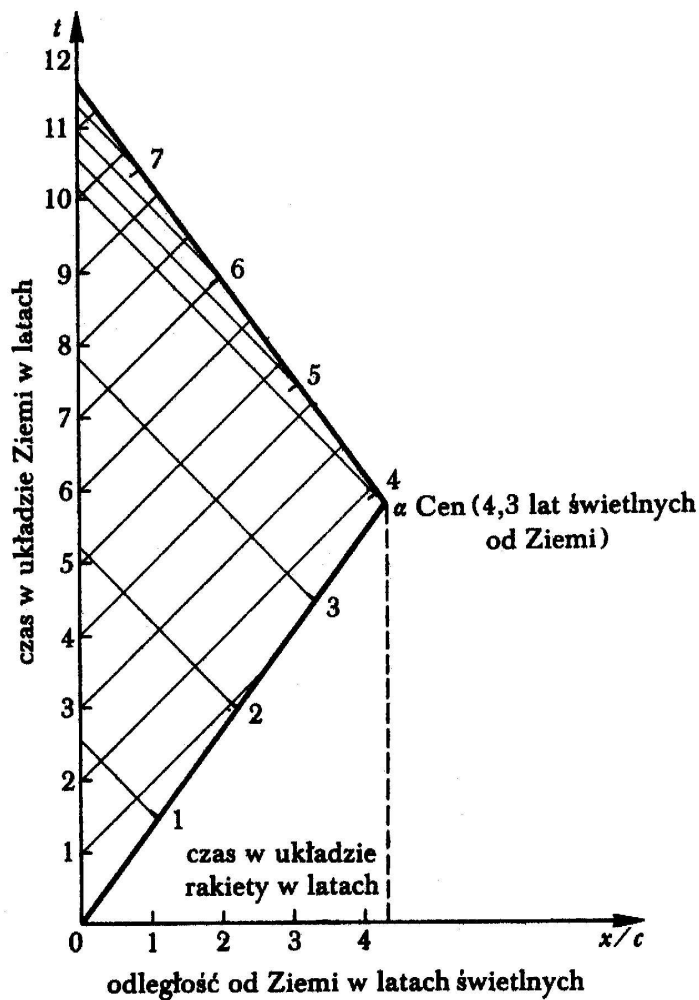
też **w tym samym miejscu**

⇒ powinni być **w tym samym wieku** !

(z niezmienniczości interwału)



Jak rozstrzygnąć czy i który z braci będzie młodszy ?



Paradoks bliźniąt

Przyjmijmy, że podróż odbywa się z prędkością $v = 0.745 c$ ($\gamma = 1.5$)

Według obserwatora na Ziemi podróż zajmie

$$\frac{2 \times 4.3}{0.745} \approx 11.5 \text{ lat}$$

Dzięki dylatacji czasu, mierzony przez kosmonautę czas podróży skróci się do:

$$\frac{11.5 \text{ lat}}{1.5} \approx 7.7 \text{ lat}$$

← impulsy świetlne wysyłane przez obu braci co rok

Paradoks bliźniąt

Dla kosmonauty odległość skróci się do $\frac{4.3}{1.5} \approx 2.9$ lat świetlnych (skrócenie Lorentza)

Podróż będzie jego zdaniem trwała $\frac{2 \times 2.9}{0.745} \approx 7.7$ lat (to samo powiedział jego brat)

Ale dla kosmonauty bieg zegarów na Ziemi ulega spowolnieniu (dylatacja czasu)

W czasie jego lotu do układu α -Centaura na Ziemi mijają tylko $\frac{0.5 \times 7.7 \text{ lat}}{1.5} \approx 2.6$ lat,

tyle samo czasu mijają na Ziemi w czasie jego podróży powrotnej.

Łącznie powinno minąć $\frac{7.7 \text{ lat}}{1.5} \approx 5.1$ lat, ale brat na Ziemi stwierdzi, że minęło 11.5 lat

Gdzie znikają ponad 6 lat !?

Paradoks bliźniąt

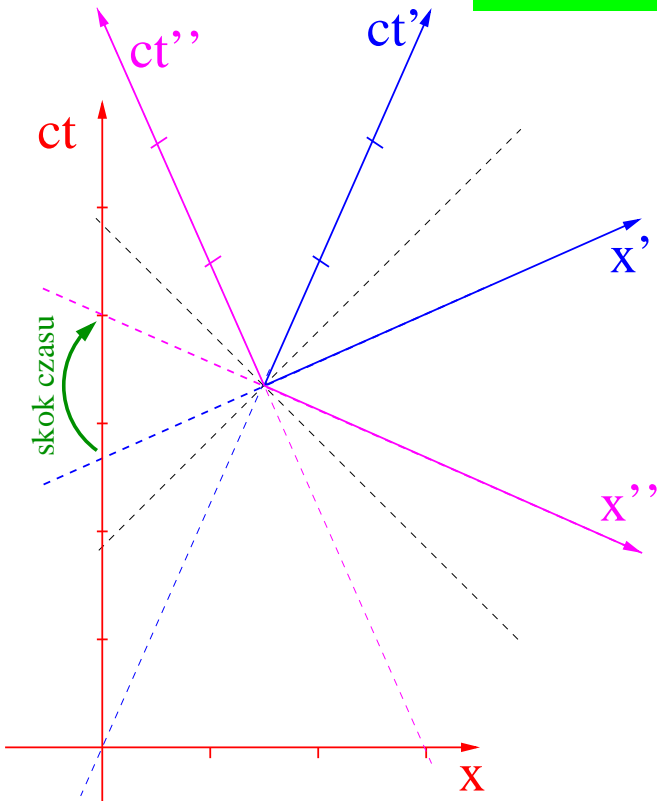
Kosmonauta obserwuje wskazania zegara na Ziemi.

Na zegarze tym przybywa “skokowo” ponad 6 lat w momencie zmiany przez kosmonautę układu współrzędnych.

Zegar na Ziemi nie może być wprost porównywany z zegarem kosmonauty
⇒ zawsze porównywany jest z najbliższym zegarem układu **współporuszającego się**.

⇒ Istotna jest synchronizacja zegarów

Synchronizacja zmienia się przy zmianie układu odniesienia.



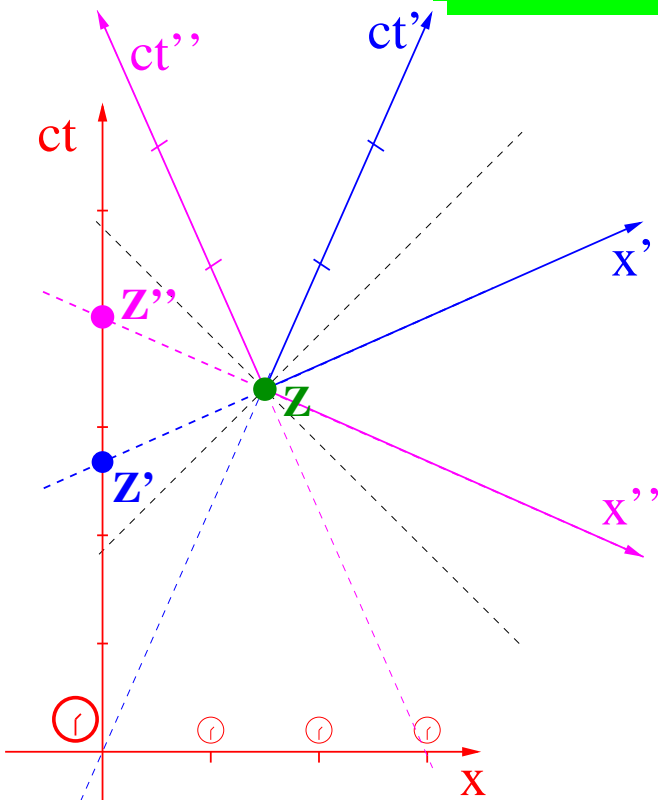
Paradoks bliźniąt

Kosmonauta obserwuje wskazania zegara na Ziemi porównując go zawsze z najbliższym zegarem jego układu.

W chwili startu ($t = t' = 0$) jest to jego własny zegar **Z**.

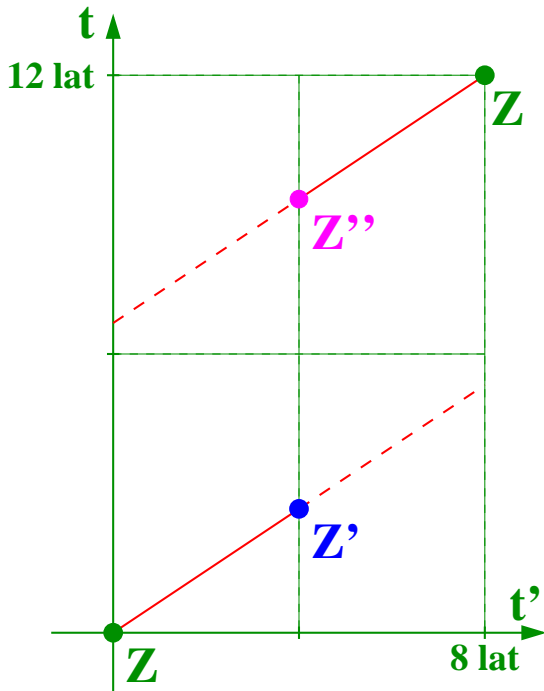
Gdy dotrze do celu są to zegary **Z'** (przed) i **Z''** (po zawróceniu).

Także obserwator na Ziemi może obserwować wskazania zegarów kosmonauty (**Z**, **Z'** i **Z''**) porównując je ze swoją siatką zegarów.



Paradoks bliźniąt

Czas na Ziemi według kosmonauty



Rakieta

Dolatując do celu, po $t' \sim 4$ latach (według swojego zegara Z), kosmonauta stwierdza, że na Ziemi minęło $t < 3$ lata.

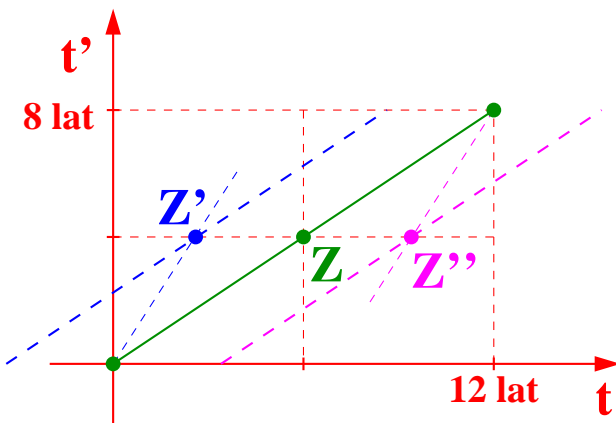
Kosmonauta opiera się na wskazaniach zegara Z' zsynchronizowanego z Z .

Po zawróceniu informacja o wskazaniach zegara na Ziemi pochodzi od zegara Z'' , też zsynchronizowanego z Z ale w nowym układzie odniesienia.

Według zegara Z'' w chwili zawracania zegar na Ziemi wskazywał $t > 9$ lat.

Paradoks bliźniąt

Wskazania zegarów kosmonauty rejestrowane przez obserwatora na Ziemi



Ziemia

Według obserwatora na Ziemi bieg zegara Z kosmonauty jest spowolniony na skutek **dylatacji czasu**.

Kosmonauta źle ocenił bieg czasu na Ziemi gdyż:

- najpierw użył zegara Z' który spieszył się względem Z
- potem użył zegara Z'' który spóźniał się względem Z

Według obserwatora na Ziemi, zawrócenie rakiety Z , oraz zdarzenia porównania czasu na Ziemi z przelatującymi zegarami Z' i Z'' nie były równoczesne.

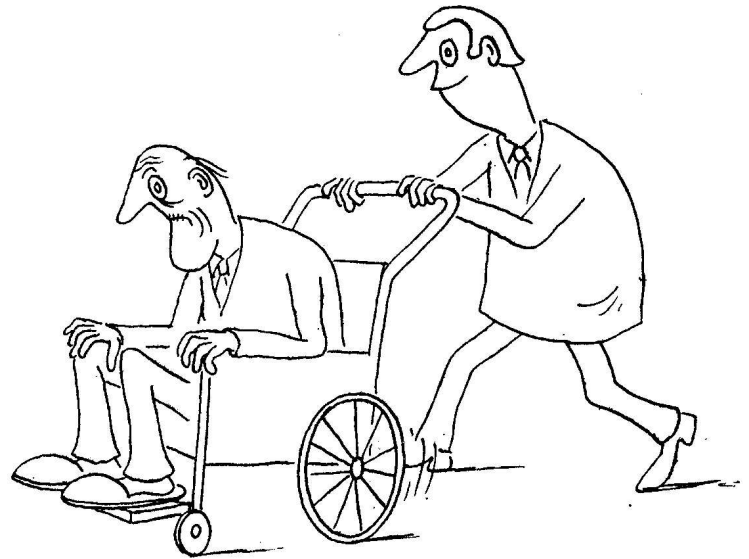
W chwili **zawracania** zegar Z' dawno minął Ziemię, a zegar Z'' jeszcze do niej nie doleciał.

Paradoks bliźniąt

Dokonany przez kosmonautę pomiar czasu jaki upłynął na Ziemi jest **nieprawidłowy**, ze względu na **zmianę układu** odniesienia.

Na ziemi minęło **11.5 lat**.

Obaj obserwatorzy zgadzają się, że dla kosmonauty minęło **7.7 lat**.



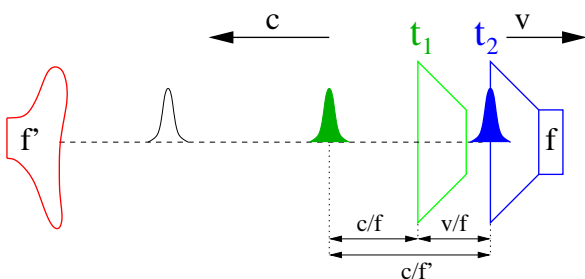
“Ziemianin”

kosmonauta

Efekt Dopplera

Dwa przypadki “klasyczne”:

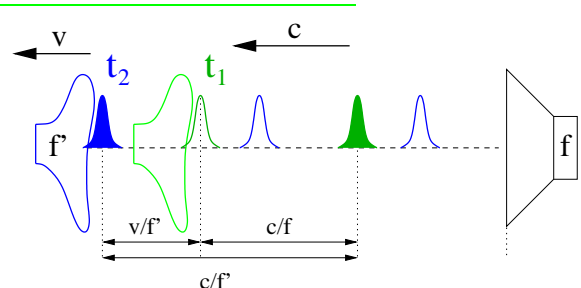
Ruchome źródło



Częstość dźwięku i **długość fali** mierzona przez obserwatora nieruchomego względem ośrodka:

$$f' = \frac{f}{1 + \beta} \quad \lambda' = \lambda (1 + \beta)$$

Ruchomy obserwator



Częstość i **długość fali** mierzona przez ruchomego obserwatora:

$$f' = f (1 - \beta) \quad \lambda' = \frac{\lambda}{1 - \beta}$$

Ale światło nie potrzebuje “ośrodka”. Powinien się liczyć tylko ruch względny !...

Efekt Dopplera

Jeśli źródło i/lub obserwator poruszają się z dużymi prędkościami

⇒ należy uwzględnić dylatację czasu

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta)(1 + \beta)}}$$

Ruchome źródło

Poruszające się źródło drga z częstotliwością γ razy mniejszą:

$$f' = \frac{f/\gamma}{1 + \beta} = f \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

Ruchomy obserwator

Dla poruszającego się obserwatora czas biegnie wolniej, mierzona częstota jest γ razy większa:

$$f' = \gamma f (1 - \beta) = f \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

⇒ Pełna symetria !

Efekt Dopplera

Ruch źródła

Wysłanie impulsu w układzie O' :

$$A : (T, 0, 0, 0)$$

W układzie O : ($c = 1$)

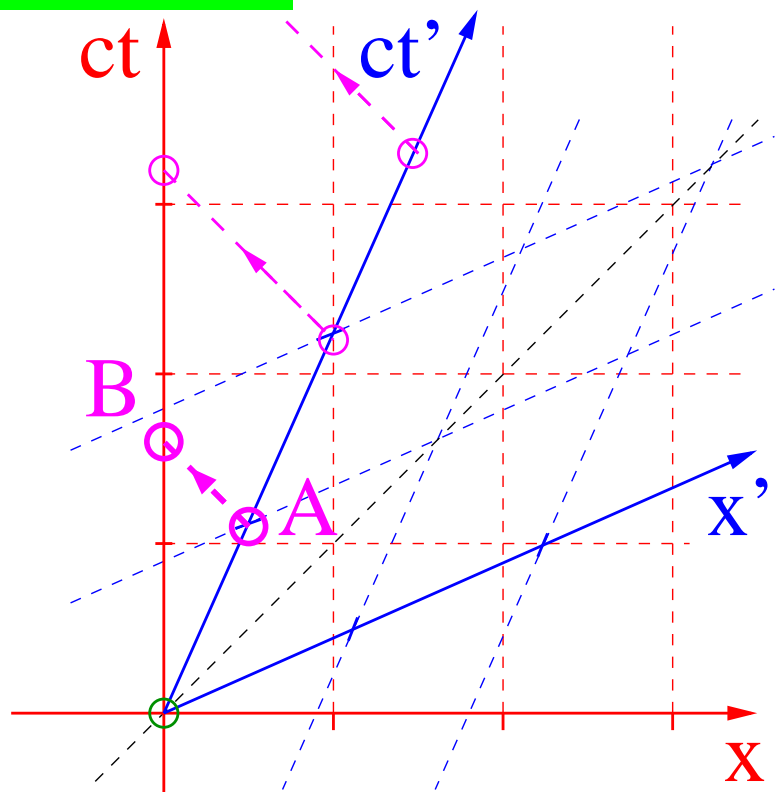
$$A : (\gamma T, \beta \gamma T, 0, 0)$$

Na pokonanie odległości $\beta \gamma T$ światło potrzebuje $\beta \gamma T$ czasu

⇒ dotarcie impulsu światła do obserwatora O :

$$B : (\gamma T + \beta \gamma T, 0, 0, 0)$$

$$T' = \gamma(1 + \beta) T = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} T$$



Efekt Dopplera

Wysłanie impulsu w układzie O :

$$A : (T, 0, 0, 0)$$

Dotarcie impulsu do obserwatora O' :

$$B : (T + \Delta T, \Delta T, 0, 0)$$

Prędkość O' względem O :

$$\beta = \frac{\Delta T}{T + \Delta T} \Rightarrow \Delta T = \frac{\beta}{1 - \beta} T$$

Współrzędne dotarcia impulsu w O :

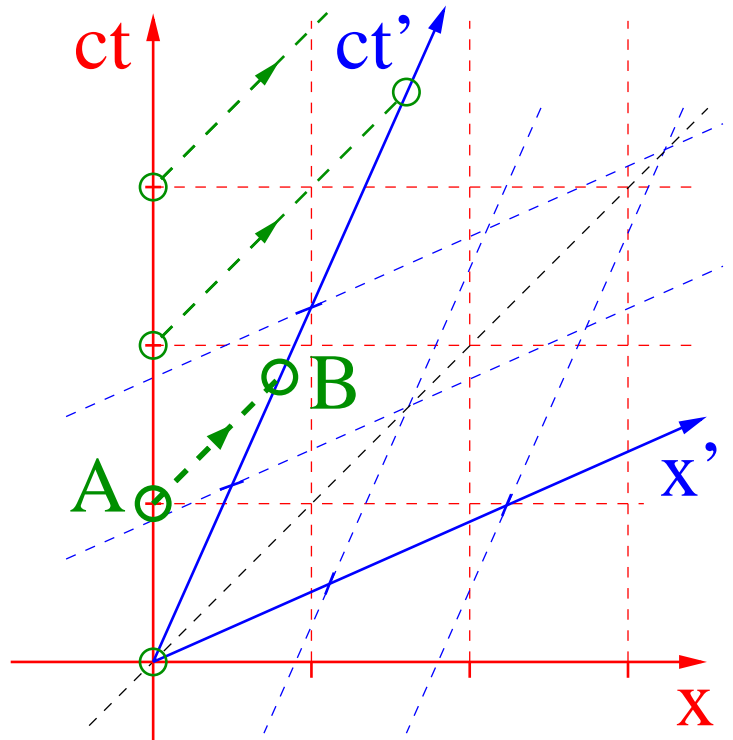
$$B : \left(\frac{T}{1 - \beta}, \frac{\beta T}{1 - \beta}, 0, 0 \right)$$

\Rightarrow według O' (dylatacja czasu)

$$B : \left(\frac{T}{\gamma(1 - \beta)}, 0, 0, 0 \right)$$

$$\Rightarrow T' = \frac{T}{\gamma(1 - \beta)} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} T$$

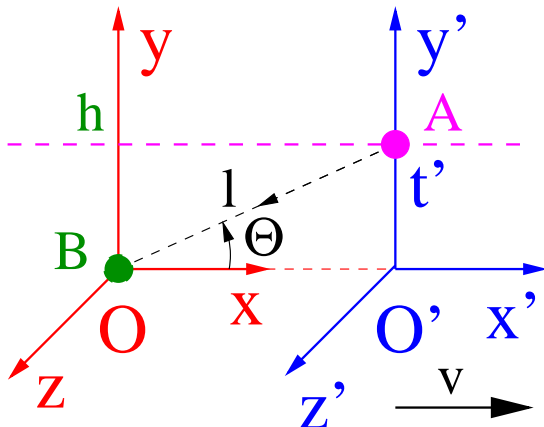
Ruch obserwatora



Efekt Dopplera

Przypadek ogólny

Źródło światła przelatuje w odległości h od obserwatora:



t - czas wysłania impulsu mierzony w układzie O' :

$$A : (t, 0, h, 0)$$

Współrzędne tego zdarzenia w układzie O :

$$A : (\gamma t, \gamma \beta t, h, 0)$$

\Rightarrow czas dotarcia impulsu do obserwatora O (B):

$$t' = \gamma t + l = \gamma t + \sqrt{(\gamma \beta t)^2 + h^2}$$

Różnica dt' między czasami dotarcia dwóch impulsów wysłanych w odstępie czasu dt

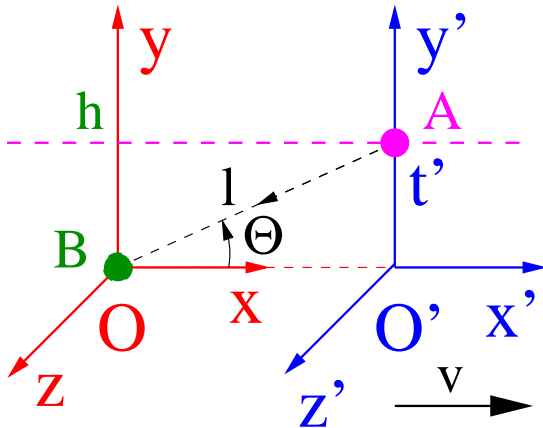
\Rightarrow współczynnik przesunięcia dopplerowskiego:

$$\text{mierzona emitowana } \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{dt'}{dt} = \gamma + \frac{\gamma^2 \beta^2 t}{\sqrt{(\gamma \beta t)^2 + h^2}} = \gamma \left(1 + \beta \frac{x}{l} \right) = \gamma (1 + \beta \cos \Theta)$$

Θ - kąt obserwacji (!)

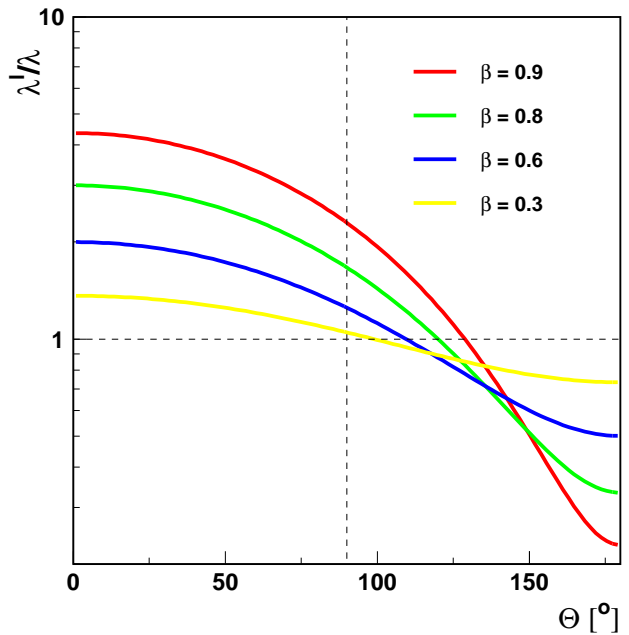
Efekt Dopplera

Przypadek ogólny



Przesunięcie długości fali:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{T'}{T} = \gamma(1 + \beta \cos \Theta)$$



Zmiana częstości także dla $\Theta = 90^\circ$!!!

Klasycznie nie ma zmiany częstości...

Efekt Dopplera

W warunkach ziemskich efekt Dopplera dla światła jest istotny tylko w wyjątkowych przypadkach.

Przesunięcie ku czerwieni w widmach odległych galaktyk zaobserwował po raz pierwszy Hubble w 1929 r.

Zauważył on, że prędkość 'ucieczki' rośnie z odległością (prawo Hubble'a):

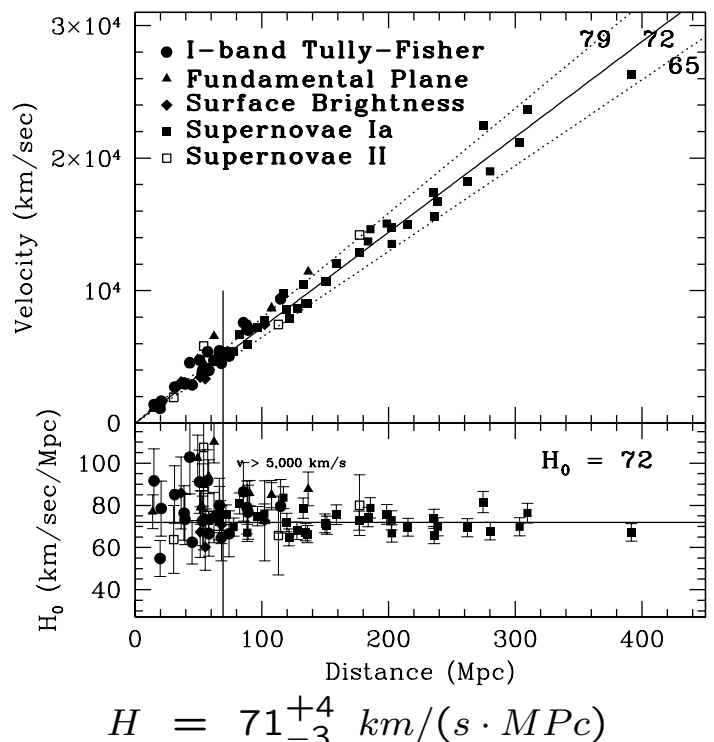
$$v = H r$$

r - odległość od Ziemi, H - stała Hubble'a

⇒ wiek Wszechświata:

$$T = 13.7 \pm 0.2 \text{ GYr}$$

Obecne pomiary



$$H = 71_{-3}^{+4} \text{ km}/(\text{s} \cdot \text{Mpc})$$