Sprawozdanie z Pracowni Naukowej 1
Optymalizacja wielomianowa

Michał Przyłuski — 4380/D
28 stycznia 2011 r.

Przypuśćmy, że w każdej chwili t, pewna wielkość x przyjmuje wartość $x(t)$ zgodnie z zależnością $x(t) = ax^E(t) + b$, gdzie $t = 0, 1, \ldots$, przy czym $x^E(t)$ jest przewidywaną przez decydenta wartością zmiennej x w chwili t. Liczby a i b są nieznane, ale wiadomo, że *a jest ujemne*. Wielkość $x^E(t)$ może być określona na wiele sposobów. Najprostszy z nich prowadzi do przyjęcia założenia, że $x^E(t) = x(t-1)$. Oznacza to, że przewidywana wielkość zmiennej x w chwili t (a więc $x^E(t)$), wyznaczana jest wyłącznie na podstawie informacji o wartości tej zmiennej w chwili poprzedniej. Wówczas $x(t) = ax(t-1) + b$, dla $t = 0, 1, \ldots$. Powyższe równanie różnicowe jest asymptotycznie stabilne (por. [4]), wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in (-1, 0)$. (Rozpatrujemy poniżej wyłącznie przypadek, gdy a jest ujemne.)

Można rozważyć sytuację, gdy do określenia przewidywanej wartości zmiennej x w chwili t (czyli $x^E(t)$) wykorzystujemy nie tylko wartości zmiennej x z chwili $t-1$, ale i z chwil poprzednich. W najprotszej sytuacji oznacza to, że $x^E(t)$ wyznaczany będzie na podstawie $x(t-1)$ oraz $x(t-2)$. Zakładając liniowość zależności wiążącej $x^E(t)$ z $x(t-1)$ i $x(t-2)$, otrzymujemy równość $x^E(t) = x(t-1) + \rho(x(t-1) - x(t-2))$, gdzie parametr ρ jest dowolną liczbą rzeczywistą. Po podstawienu do równania $x(t) = ax^E(t) + b$ otrzymamy

$$x(t) = a[x(t-1) + \rho(x(t-1) - x(t-2))] + b,$$

tzn.

$$x(t) = a(1+\rho)x(t-1) - a\rho x(t-2) + b.$$

Powyższe równanie różnicowe jest asymptotycznie stabilne wtedy i tylko wtedy, gdy pierwiastki jego równania charakterystycznego $\lambda^2 - a(1+\rho)\lambda + a\rho = 0$ mają wartości bezwzględne mniejsze niż 1. Zależność położenia pierwiastów tego równania kwadratowego od parametru ρ była szczegółowo analizowana w 1947 roku przez R. M. Goodwina (badania te są szczegółowo opisane w monografii [2]). Okazuje się, że dla a należących do przedziału $(-3, 0)$ można dobrać tak parametr ρ, żeby powyższe równanie różnicowe było asymptotycznie stabilne. Właściwą wartością ρ jest $-1/3$. Oznacza to, że dla dowolnego $a \in (-3, 0)$ równanie różnicowe

$$x(t) = a[x(t-1) - 1/3(x(t-1) - x(t-2))] + b,$$

jest zawsze asymptotycznie stabilne.

Podkreślmy, że *dla* $a \geqslant 3$, *powyższe równanie różnicowe nigdy nie jest asymptotycznie stabilne, niezależnie od* ρ. Narzuca się więc pytanie, czy wykorzystanie więcej niż dwóch wartości poprzednich zmiennej x do wyznaczenia przewidywanej wartości tej zmiennej (czyli $x^E(t)$) zwiększy zakres wartości współczynnika a, dla których to wartości odpowiednie równanie różnicowe będzie asymptotycznie stabilne.

Zbadamy więc przypadek, gdy do określenia przewidywanej wartości zmiennej x w chwili t (czyli $x^E(t)$) wykorzystujemy wartości zmiennej x z chwil $t-1$, $t-2$ oraz $t-3$. Zakładając liniowość związku wiążącego $x^E(t)$ z $x(t-1)$, $x(t-2)$ i $x(t-3)$ mamy zależność $x^E(t) = x(t-1)+\rho(x(t-1)-x(t-2))+\gamma(x(t-2)-x(t-3))$, gdzie parametry ρ i γ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Po podstawienu do równania $x(t) = ax^E(t)+b$ otrzymamy następujące równanie różnicowe:

$$(*) \qquad x(t) = a[x(t-1) + \rho(x(t-1) - x(t-2)) + \gamma(x(t-2) - x(t-3))] + b.$$

Tak więc (dla $t = 0, 1, \dots$)

$$x(t) = a(1+\rho)x(t-1) + a(\gamma-\rho)x(t-2) - a\gamma x(t-3) + b.$$

Odpowiednie równanie charakterystyczne jest następujące:

$$\lambda^3 - a(1+\rho)\lambda^2 - a(\gamma-\rho)\lambda + a\gamma.$$

Bezpośrednie badanie zależności pierwiastków tego równania od parametrów ρ i λ jest dość trudne. Możliwe jest jednakże określenie warunków koniecznych i dostatecznych do tego, aby wszystkie pierwiastki tego równania miały wartości bezwzględne mniejsze niż 1. Dla wielomianu trzeciego stopnia $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3$ warunki te (por. [1]) mają postać nierówności

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 + a_2 + a_3 > 0, \\ & -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 > 0, \\ & |a_0| < a_3, \\ & a_0^2 - a_3^2 < a_0 a_2 - a_1 a_3. \end{aligned}$$

Wykorzystując powyższe zależności, otrzymujemy następujące warunki asymptotycznej stabilności rozpatrywanego równania różnicowego $(*)$:

$$\begin{aligned} & \alpha > 0, \\ & \alpha(2\rho - 2\gamma + 1) < 1, \\ & \alpha^2\gamma^2 < 1, \\ & \alpha^2\gamma^2 - 1 < -\alpha^2\gamma(1+\rho) - \alpha(\gamma-\rho), \end{aligned}$$

gdzie α oznacza $|a|$ (przypomnijmy, że rozpatrujemy tylko przypadek $a < 0$).

Interesuje nas wyznaczenie największej wartości α, dla której powyższe nierówności są spełnione dla odpowiednio dobranych ρ i λ. Analityczne rozwiązanie tych nierówności wydaje się dość trudne, dlatego podjęto próbę numerycznego wyznaczenia największej wartości α.

Poniżej opiszę związane z tym doświadczenia. Analizie poddano poniższy problem optymalizacji:

$$\begin{aligned} \text{maksymalizuj} \quad & \alpha \\ \text{p. o.} \quad & \alpha \geqslant 0, \\ & \alpha(2\rho - 2\gamma + 1) \leqslant 1, \\ & \alpha^2\gamma^2 \leqslant 1, \\ & \alpha^2\gamma^2 - 1 + \alpha^2\gamma(1+\rho) + \alpha(\gamma - \rho) \leqslant 0. \end{aligned}$$

Zauważmy, że w sformułowaniu występują tylko nierówności słabe, co znaczy, że maksymalne α będzie leżało na granicy obszaru stabilności.

Jak wiadomo, dla $\gamma = 0$, górne ograniczenie na α wynosi 3. Doświadczenia numeryczne miały na celu wskazanie ograniczenia przy dowolnym γ, czyli maksymalizację α.

Powyższe zadanie optymalizacji zostało zapisane w pakiecie YALMIP środowiska MATLAB i rozwiązane przy pomocy standardowego algorytmu. Wykorzystano wbudowaną w MATLAB procedurę *fmincon*, poszukującą ekstremum warunkowego funkcji. Bez dodatkowych opcji procedura ta wykorzystuje algorytm zwany trust-region-reflective i za rozwiązanie optymalne uznaje $(\alpha, \gamma, \rho) = (21.3087, -0.0469, -0.5235)$. Identyczny wynik można uzyskać przy pomocy algorytmu active-set.

Pozostałe dwa algorytmy wspierane przez *fmincon* dają gorsze rezultaty. Technika sqp znajduje punkt $(\alpha, \gamma, \rho) = (7.3302, -0.1364, -0.5682)$, a interior-point nie znajduje żadnego rozwiązania, przekraczając maksymalną liczbę 3000 obliczeń wartości funkcji. Po zwiększeniu tego limitu, *fmincon* zostaje zatrzymany przez limit 1000 iteracji. Niestety, zwiększanie tych ograniczeń nie pozwala nadal uzyskać żadnego wyniku.

Odmienna sytuacja ma miejsce po dodaniu dodatkowego ograniczenia $\gamma = 0$ lub $\gamma = -0.0469$.

W przypadku $\gamma = 0$ *fmincon*, zgodnie z wynikami analitycznymi, wyznacza maksimum funkcji celu dla $(\alpha, \gamma, \rho) = (3, 0, -0.3333)$.

Zaskakujący jest wynik dla $\gamma = -0.0469$. Wydawać by się mogło, że procedury numeryczne powinny znaleźć rozwiązanie $\alpha = 21.3087$, lub chociaż bardzo jemu bliskie. Niestety, przy tak ustalonej wartości parametru γ jedyne co *fmincon* odnajduje to $(\alpha, \gamma, \rho) = (3.6928, -0.0469, -0.4115)$.

Warto podkreślić, że (przy wykorzystaniu standardowego algorytmu trust-region-reflective) *fmincon* nie stwierdza żadnych problemów numerycznych w trakcie obliczeń i przedstawia znalezione wyniki jako rozwiązania optymalne poszczególnych zagadnień.

Kolejnym krokiem było wykorzystanie wyspecjalizowanej biblioteki GloptiPoly3 służącej do rozwiązywania problemów optymalizacji o wielomianowej funkcji celu i ograniczeniach. GloptiPoly3 został szczegółowo opisany w [3]. W celu rozwiązania zadania GloptiPoly3 przekształca je do zrelaksowanej postaci, którą można zapisać jako problem

SDP (por. [5]). Po sformułowaniu problemu jako SDP, GloptiPoly3 wykorzystuje dowolny solwer półokreślony do jego rozwiązania. W praktyce często jest to SeDuMi lub SDPT3.

W przypadku rozważania problemu bez dodatkowych założeń na γ, GloptiPoly3 — wykorzystując zarówno SeDuMi jak i SDPT3 — nie dochodzi do żadnego wyniku. Obydwa solwery po wielu iteracjach kończą swoje działanie z błędem *run into numerical problems* (SeDuMi) lub *stop: lack of progress in dual infeas, homrp=Inf* (SDPT3).

Próby rozwiązania tego zadania przy $\gamma = 0$ zakończyły się sukcesem, niezależnie od wykorzystanego solwera półokreślonego, znalezione zostało optymalne rozwiązanie. W przypadku $\gamma = -0.0469$ GloptiPoly3 również znajduje akceptowalne rozwiązanie $(\alpha, \gamma, \rho) = (21.3220, -0.0469, -0.5274)$.

Ostatecznie, rozważany problem optymalizacji, zaimplementowano w języku C przy pomocy biblioteki Ipopt (opisanej w [6]).

Natrafiono na znaczne trudności numeryczne.

Pewnym zaskoczeniem jest fakt, że wpływ na jakość znalezionego rozwiązania ma kolejność wykonywania operacji na składnikach sumy w drugim ograniczeniu.

Po nałożeniu sztucznego ograniczenia $\alpha \leqslant 4{\cdot}10^6$, Ipopt znalazł $(\alpha, \gamma, \rho) = (4{\cdot}10^6, -2.5{\cdot}10^{-7}, -0.5)$, jednakże w tym przypadku sprawdzenie bezpośrednie ujawnia niespełnienie drugiego ograniczenia. Niestety, Ipopt w trakcie rozwiązywania tego problemu nie zgłasza żadnych błędów, więc można ulec złudzeniu, że jest to prawidłowe rozwiązanie. Wnikliwa analiza pozwoliła stwierdzić, że błąd Ipopta wynika z problemów numerycznych w czasie wykonywania obliczenia drugiego ograniczenia $(-1 + \text{mała\_liczba} + 1)$. Można tę trudność ominąć zmieniając kolejność wykonywanych operacji. Po dokonaniu takiej korekty, przy ograniczeniu $\gamma \leqslant 4 \cdot 10^6$, Ipopt nie zbiega do żadnego rozwiązania.

Rozwiązywanie problemu bez dodatkowych ograniczeń nie przyniosło zadowalających efektów. Podjęto próbę zarówno standardowym algorytmem wykorzystywanym przez Ipopta, jak i alternatywnym — *Mehrotra predictor-corrector*. Zmieniano także strategię doboru parametru barier (*mu_strategy*). Co więcej, problem sformułowano zarówno jako $\min -\alpha$, jak i $\max \alpha$. We wszystkich tych przypadkach wyniki były znacząco różne.

Świadczyć to może o wyjątkowo niekorzystnej numerycznie postaci problemu.

W zależności od użytego algorytmu, i górnego ograniczenia na γ, Ipopt znajdował rozwiązania dopuszczalne oraz niedopuszczalne. Każde z nich wymagało „ręcznej" weryfikacji.

Ostatecznie, po dodaniu sztucznego górnego ograniczenia $\gamma \leqslant 10000$ bibliotece Ipopt udało się znaleźć dopuszczalne rozwiązanie $(\alpha, \gamma, \rho) = (10000, -0.0001, -0.50005)$. Warto podkreślić, że ze względu na problemy numeryczne ujawnione w trakcie poprzednich doświadczeń z tym zadaniem, rozwiązanie to poddano dodatkowemu sprawdzeniu. Okazuje się, że spełnia ono wszystkie ograniczenia.

Podsumowując, wrażliwość tego zadania na błędy numeryczne jest ogromna i prawdziwą sztuką byłoby takie zapisanie w języku C całego problemu, aby uniknąć tego i innych — trudnych do przewidzenia — błędów.

Na podstawie wszystkich doświadczeń numerycznych wydaje się zasadnym wysnucie hipotezy, że problem ten nie jest ograniczony. Nie zmienia to faktu, że przetestowane solwery bardzo źle radziły sobie z nim; największym zaskoczeniem jest prawie całkowita bezradność — wydawałoby się — specjalizowanego solwera GloptiPoly3.

Literatura

[1] J. Ackermann: *Regulacja impulsowa*, WNT, Warszawa 1976

[2] G. Gandolfo: *Mathematical Methods and Models in Economic Dynamics*, North-Holland, Amsterdam 1971

[3] D. Henrion, J. B. Lasserre, J. Loefberg: *GloptiPoly 3: moments, optimization and semidefinite programming*, Optimization Methods and Software, Vol. 24, Nos. 4–5, pp. 761–779, 2009

[4] J. P. LaSalle: *The Stability and Control of Discrete Processes*, Springer, New York 1986

[5] J. B. Lasserre: *A Semidefinite programming approach to the generalized problem of moments*, Mathematical Programming, Vol. 112, pp. 65–92, 2008

[6] A. Wächter, L. T. Biegler: *On the Implementation of a Primal-Dual Interior Point Filter Line Search Algorithm for Large-Scale Nonlinear Programming*, Mathematical Programming, Vol. 106(1), pp. 25–57, 2006