ODS PROJEKT 2 — ZADANIE 11 (ZASILANIE MIASTA)

Michał Przyłuski

22 stycznia 2011 r.

1 Opis problemu

Zadanie dotyczy zasilania pewnego miasta, które otrzymuje energię elektryczną z trzech elektrowni. Każda z nich ma pewną charakterystykę — cenę wytworzenia MWh oraz moc maksymalną, która jest w stanie wygenerować.

Znana jest także prognoza zapotrzebowania na energię (w MW) w mieście, i wynosi dla kolejnych czterech godzin $b = (78, 115, 70, 65)^T$.

Koszt wytworzenia p MWh energii elektrycznej przedstawiają następujące zależności (dla każdej elektrowni, w tysiącach zł):

$$c_1(p) = \begin{cases} 8p & \text{dla } p \leqslant 25 \\ 9(p-25)+200 & \text{dla } 25 < p \leqslant 35 \end{cases} \tag{1}$$

$$c_2(p) = \begin{cases} 9p & \text{dla } p \leqslant 20 \\ 7.5(p-20)+180 & \text{dla } 20 < p \leqslant 40 \end{cases} \tag{2}$$

$$c_3(p) = \begin{cases} 10p & \text{dla } p \leqslant 25 \\ 11(p-25)+250 & \text{dla } 25 < p \leqslant 45 \end{cases} \tag{3}$$

Warto zauważyć, że są to zależności ciągłe, kawałkami liniowe. Wzory te określają jednocześnie maksymalną moc generowaną przed daną elektrownię, tj. odpowiednio 35, 40 i 45 MW.

Celem zadania było takie obciążenie elektrowni, które zapewniając pokrycie potrzeb miasta, będzie charakteryzowało się najniższym kosztem.

2 Model matematyczny

Kluczowe dla rozwiązania problemu jest odpowiednie sformułowanie modelu matematycznego.

Chwilowo ustalamy rozważaną godzinę (jedną z czterech).

Przyjmijmy następujące zmienne decyzyjne odpowiadające obciążeniu danej elektrowni o określonej godzinie. Niech x_1, x_2, x_3 odpowiadają mocy (w MW) generowanej przez

1, 2 i 3 elektrownię. Nie jest zasadne nakładanie na x_i dodatkowych ograniczeń jak ograniczenia całkowitoliczbowości.

Aby oddać nieliniowy koszt energii, możemy zmienne te przedstawić w postaci $x_1 = 35y_1 + 25y_2$, gdzie $y_1 + y_2 \leqslant 1$ oraz $y_1, y_2 \in [0, 1]$. W przypadku pierwszej elektrowni odpowiada to rozbiciu generowanej przez nią energii na droższe 10 MW i tańsze 25 MW. y_i są zatem pewnego rodzaju wagami.

Warto jednocześnie przedstawić w jaki sposób wpłynie to na funkcję celu.

Oryginalna funkcja celu, dla ustalonej godziny, wyglądała następująco:

$$\text{minimalizuj} \quad c_1(x_1) + c_2(x_2) + c_3(x_3).$$

Rozważmy chwilowo tylko część dotyczącą pierwszej elektrowni. Można ją zapisać jako $(9 \cdot 10 + (8 \cdot 25))y_1 + (8 \cdot 25)y_2 = 290y_1 + 200y_2$. Rzeczywiście, „przełączenie" ceny MWh następuje przy mocy 25MW, co odpowiada cenie 200 (tyś. zł).

A zatem, łączny koszt dla wszystkich trzech elektrowni, wygenerowania energii zadanej wektorem $y = (y_1, y_2, \ldots, y_6)^T$, czyli wynoszącej $(35y_1+25y_2)+(40y_3+20y_4)+(45y_5+25y_6)$, jest równy $(290y_1 + 200y_2) + (330y_3 + 180y_4) + (470y_5 + 250y_6)$. Dla przejrzystości zapisu składniki dotyczące danej elektrowni zostały zamknięte w nawiasach. Warto w tym momencie zauważyc, ze wyrażenie $(35y_1+25y_2)$ jest ukrytym ograniczeniem na maksymalną moc produkowaną przez pierwszą elektrownię, w zależności o y_1, y_2 wartość tej sumy zmienia się od 0 do 35 MW. A zatem, to ograniczenia na sumę odpowiednich y_i gwarantują nieprzekroczenie możliwości produkcyjnych elektrowni.

Ostatecznie, problem nadrzędny (odpowiadający globalnym ograniczeniom) można opisać jako

$$\begin{aligned} \text{minimalizuj} \quad & (290y_1 + 200y_2) + (330y_3 + 180y_4) + (470y_5 + 250y_6) \\ \text{p. o.} \quad & y_1 + y_2 \leqslant 1 \\ & y_3 + y_4 \leqslant 1 \\ & y_5 + y_6 \leqslant 1 \\ & 0 \leqslant y_i \leqslant 1 \quad \text{dla } i \in \{1, \ldots, 6\}. \end{aligned}$$

W powyższym problemie oczywiście brakuje ograniczeń oddających zapotrzebowanie na energię elektryczną w określonej godzinie.

Dla pewnej ustalonej godziny i, ograniczenie to można sformułować jako $(35y_1+25y_2)+(40y_3 + 20y_4) + (45y_5 + 25y_6) \geqslant P_i$.

Zauważmy, że dodawanie ograniczenia odpowiadającemu zapotrzebowaniu na moc w danej godzinie jest w pewnym sensie równoważne dodaniu „kolumny" w zadaniu dualnym.

Możemy zatem sformułować 4 problemy podrzędne (dla każdej godziny inny):

$$\begin{aligned} \text{minimalizuj} \quad & (290y_1 + 200y_2) + (330y_3 + 180y_4) + (470y_5 + 250y_6) \\ \text{p. o.} \quad & (35y_1 + 25y_2) + (40y_3 + 20y_4) + (45y_5 + 25y_6) \geqslant P_i \\ & y_1 + y_2 \leqslant 1 \\ & y_3 + y_4 \leqslant 1 \\ & y_5 + y_6 \leqslant 1 \\ & 0 \leqslant y_i \leqslant 1 \quad \text{dla } i \in \{1, \ldots, 6\}. \end{aligned}$$

Dla pierwszej godziny $P_1 = 78$, dla drugiej $P_2 = 115$, dla trzeciej $P_3 = 70$, a dla czwartej $P_4 = 65$.

Po rozwiązaniu tych 4 problemów podrzędnych otrzymamy (dla każdej godziny) obciążenie każdej z elektrowni (w postaci jawnej — po przejściu z y_i do x_i) zapewniające pokrycie zapotrzebowania na moc w tej godzinie i minimalizujące koszt wygenerowania mocy.

Warto podkreślić, że problem ten ma strukturę umożliwiającą dekompozycję. Zadanie dla każdej godziny jest całkowicie niezależne od zadania dla innej godziny. Wynika to m. in. z braku „kary" za uruchomienie (bądź zatrzymanie) generatora. Z tego powodu ograniczenia na minimalną moc dla każdej godziny można traktować jako ograniczenia lokalne w technice generacji kolumn.

Dzięki takiemu podziałowi na ograniczenia globalne i lokalne, problem nadrzędny nie jest istotny dla rozwiązania zadania, bo każde rozwiązanie spełniające ograniczenia problemu podrzędnego będzie spełniać ograniczenia globalne, a jednocześnie będzie rozwiązaniem optymalnym (nadrzędnego problemu) dla danej godziny. Inny podział ograniczeń na globalne i lokalne byłby sztuczny.

3 Wyniki

Obciążenie elektrowni A, B, C w kolejnych rozważanych 4 godzinach prezentuje poniższa tabela.

1. godzina	$x_1 = 35$	$x_2 = 40$	$x_3 = 3$
2. godzina	$x_1 = 35$	$x_2 = 40$	$x_3 = 40$
3. godzina	$x_1 = 30$	$x_2 = 40$	$x_3 = 0$
4. godzina	$x_1 = 25$	$x_2 = 40$	$x_3 = 0$

Jest to wynik zgodny z intuicją, która podpowiada, że kolejno będą wykorzystywane „najtańsze" MWh.

4 Algorytmy i uruchamianie

Powyższe zadania zostały zaimplementowane w API solwera CPLEX.

Program generuje i rozwiązuje kolejno problemy dla każdej godziny, wyświetlając wartości zmiennych decyzyjnych y_i oraz wyznaczone obciążenie elektrowni x_i.

Problemy podrzędne rozwiązane zostały przy wykorzystaniu dualnej metody simplex.