Optymalizacja wypukła: wybrane zagadnienia i zastosowania

Michał Przyłuski

21 września 2010 r.

Zadania optymalizacji

- Ogólne
- Wypukłe
- Stożkowe
- Zadania sprowadzalne do SOCP/SDP

Zastosowania

- Regresja z ograniczeniami
- Filtry cyfrowe

Wnioski

Ogólne zadanie optymalizacji

$$
\begin{aligned}
\text{minimalizuj} \quad & f_0(x) \\
\text{p. o.} \quad & f_i(x) \leqslant 0, \;\; i = 1, \ldots, m, \\
& h_i(x) = 0, \;\; i = 1, \ldots, p;
\end{aligned}
$$

- x — wektor zmiennych decyzyjnych,
- f_0 — funkcja celu,
- funkcje f_i oraz h_i — ograniczenia nierównościowe i równościowe.

Pewne klasy zadań optymalizacji

Rozwiązując takie zadania natrafiamy na szereg trudności, dlatego wolimy analizować ich szczególne postacie:

- zadania programowania liniowego — wszystkie funkcje są afiniczne,
- zadania programowania wypukłego — ograniczenia równościowe są afiniczne, pozostałe funkcje są wypukłe.

Wszystkie te problemy można (wydajnie) rozwiązywać metodą punktu wewnętrznego.

Stożkowe zadania programowania liniowego

$$\begin{aligned} \text{minimalizuj} \quad & f^T x \\ \text{p. o.} \quad & Ax + b \leqslant_K 0 \end{aligned}$$

- K — ustalony stożek dodatni w $\mathbb{R}^m$ (tj. generujący porządek $\leqslant_K$),
- wypukła $f \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ oraz $b \in \mathbb{R}^m$ — ustalone parametry zadania.

Szczególne przypadki to:

- programowanie stożkowe drugiego stopnia (SOCP),
- programowanie półokreślone (SDP).

Zadania SOCP

$$\begin{aligned} \text{minimalizuj} \quad & f^T x \\ \text{p. o.} \quad & \|A_i x + b_i\| \leqslant c_i^T x + d_i, \ \ i = 1, 2, \ldots, N; \end{aligned}$$

- $f \in \mathbb{R}^n$, $A_i \in \mathbb{R}^{(n_1-1)\times n}$, $b_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}$, $c_i \in \mathbb{R}^n$ oraz $d_i \in \mathbb{R}$ — ustalone parametry zadania.

Ograniczenia te określają stożek drugiego stopnia, bowiem nierówność

$$\|A_i x + b_i\| \leqslant c_i^T x + d_i$$

jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{bmatrix} A_i \\ c_i^T \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_i \\ d_i \end{bmatrix} \in C_{n_i},$$

gdzie C_{n_i} stożek drugiego stopnia wymiaru n_i.

Zadania SDP

Niech

$$F(x) := F_0 + \sum_{i=1}^{m} x_i F_i,$$

gdzie $F_0, F_1, \ldots, F_m$ — ustalone macierze symetryczne.

$$\begin{aligned} \text{minimalizuj} \quad & c^T x \\ \text{p. o.} \quad & F(x) \succcurlyeq 0 \end{aligned}$$

- wektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)^T$ — zmienna decyzyjna,
- macierze F_i oraz wektor c — parametry zadania,
- warunek dodatniej półokreśloności macierzy $F(x)$ — ograniczenie (LMI).

Do postaci SOCP lub SDP możemy sprowadzić m. in.:

- zadania programowania geometrycznego,
- QCQP,
- (krzepkie) zadania programowania liniowego,
- krzepkie zadania najmniejszych kwadratów,
- zadania minimalizacji normy.

W pracy omówiono zastosowania w:

- rozpoznawaniu obrazów,
- projektowaniu układów anten,
- robotyce,
- teorii portfela,
- regresji z ograniczeniami,
- projektowaniu filtrów cyfrowych.

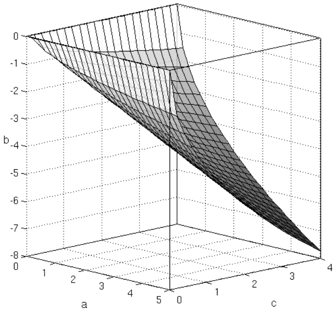
Sformułowanie problemu i motywacja

Szukamy funkcji $C(q)$, która jest (na prawej półosi):

- nieujemna,
- niemalejąca,
- wklęsło-wypukłą.

Chcemy, aby przybliżała ona pewne punkty empiryczne (c_k, q_k).

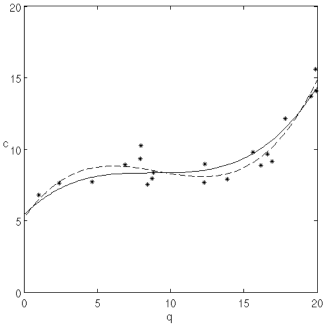
Zadanie optymalizacji wypukłej



$$
\begin{aligned}
\text{minimalizuj} \quad & \sum_{k=1}^{K} \left(c_k - (a q_k^3 + b q_k^2 + c q_k + d) \right)^2 \\
\text{p. o.} \quad & a \geqslant 0, b \leqslant 0, c \geqslant 0, d \geqslant 0, \\
& b^2 \leqslant 3ac.
\end{aligned}
$$

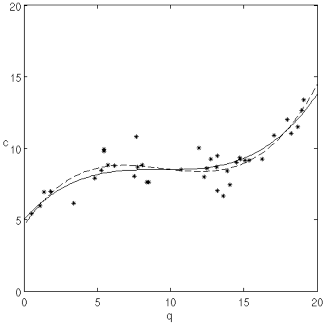
Wyniki (1)

Rozważono 20 punktów empirycznych.
Rysunek przedstawia wykresy funkcji trzeciego stopnia dopasowanych bez i z ograniczeniami.



Wyniki (2)

Analogiczne wyniki uzyskano dla 40 punktów empirycznych.



Do obliczeń wykorzystano pakiet YALMIP pod MATLABem.

Filtry cyfrowe

Filtry cyfrowe — filtry, które przetwarzają dyskretne sygnały.
Mogą być m. in.:

- dolnoprzepustowe,
- górnoprzepustowe,
- o bardziej złożonej charakterystyce.

Filtry takie są jednoznacznie określone przez ciąg n współczynników h_k zależnością:

$$y(t) = e^{j\omega t} \sum_{k=0}^{n-1} h_k e^{-j\omega k}.$$

Nazywamy je *filtrami o skończonej odpowiedzi impulsowej*.

Projektowanie filtrów cyfrowych

Warto wymienić dwa podejścia do projektowania filtrów i ich konsekwencje:

- można zadać minimalną wartość tłumienia w paśmie zaporowym,
- można zadać transmitancję w całym paśmie.

Kryterium jakości jest błąd (najczęściej ℓ_∞ lub ℓ_2) przybliżenia pożądanej charakterystyki przez zaprojektowaną.
Czasem mamy dodatkowe oczekiwania takie jak:

- równofalowość,
- stałość opóźnienia grupowego (w paśmie przenoszenia).

Możliwość ich spełnienia zależy od wybranej metody projektowania.

Podejście SDP — Sformułowanie problemu

Pożądana charakterystyka częstotliwościowa:

$$H^{\text{aim}}(\omega) = \begin{cases} e^{-j42\omega} & \text{dla } 0 \leqslant \omega \leqslant 0.45\pi, \\ 0 & \text{dla } 0.5\pi \leqslant \omega \leqslant \pi. \end{cases}$$

Można problem zaprojektowania takiego filtru sformułować jako:

$$\text{minimalizuj} \quad \max_{\omega \in \Omega} |H(e^{j\omega}) - H^{\text{aim}}(\omega)|.$$

Jest to zbliżone do rozpatrzywania problemu:

$$\begin{aligned} \text{minimalizuj} \quad & t \\ \text{p. o.} \quad & |H(e^{j\omega}) - H^{\text{aim}}(\omega)|^2 \leqslant t, \omega \in \Omega. \end{aligned}$$

Jest to problem ciągły, dlatego poddano go dyskretyzacji dla $N = 300$ częstotliwości próbnych. Rozważany będzie filtr długości filtru $n = 85$.

Po przekształceniach, przyjmując oznaczenia:

$$\alpha_1(\omega_i) := w(\omega_i)\Big[\sum_{k=0}^{n-1} h_k c_k(\omega_i) - H_i^{\text{real}}\Big], \alpha_2(\omega_i) := w(\omega_i)\Big[\sum_{k=0}^{n-1} h_k s_k(\omega_i) + H_i^{\text{im}}\Big],$$

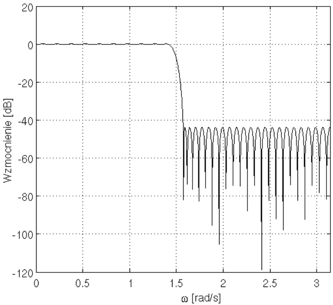
oraz
$$D_i := \begin{bmatrix} t & \alpha_1(\omega_i) & \alpha_2(\omega_i) \\ \alpha_1(\omega_i) & 1 & 0 \\ \alpha_2(\omega_i) & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

stwierdzamy, że $D_i \succcurlyeq 0 \Leftrightarrow t - \alpha_1^2(\omega_i) - \alpha_2^2(\omega_i) \geqslant 0$.
Łącząc $N = 300$ takich warunków do $F(x) := \operatorname{diag}(D_1, D_2, \ldots, D_N)$ możemy sformułować ostateczny problem:

$$\begin{aligned} \text{minimalizuj} \quad & t \\ \text{p. o.} \quad & F(x) \succcurlyeq 0, \end{aligned}$$

gdzie $x = \big(t, h_0, h_1, \ldots, h_{n-1}\big)^T$ — wektor zmiennych decyzyjnych.

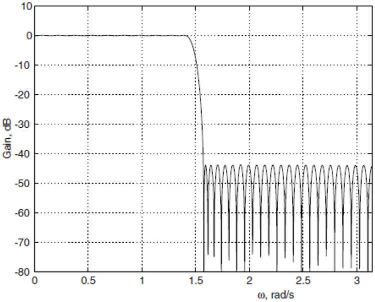
Wyniki



Zaprojektowany filtr:

- jest równofalowy,
- ma stałe opóźnienie grupowe.

Wyniki (2)



Zaprojektowany filtr:

- ma taką samą charakterystykę częstotliwościową jak filtr otrzymany przez Antoniou i Lu.

Podsumowanie

Podstawowe przesłanki za stosowaniem optymalizacji wypukłej:

- wiele zadań można przekształcić do takiej postaci — zastosowania w licznych dziedzinach,
- wydajne algorytmy rozwiązywania zadań.

Zastosowanie metod optymalizacji wypukłej w przypadku problemu regresji z ograniczeniami zagwarantowało uzyskanie poprawnego merytorycznie wyniku.
W przypadku filtrów cyfrowych — otrzymany filtr, pomimo wyższych nakładów obliczeniowych, ma lepszą charakterystykę niż zaprojektowany klasycznymi metodami.