Sprawozdanie z pracowni dyplomowej inżynierskiej 1
Optymalizacja wypukła: wybrane zastosowania

Michał Przyłuski

W niektórych zastosowaniach optymalizacji wypukłej odgrywają rolę nierówności macierzowe postaci

$$LMI(y) := A_0 + y_1 A_1 + y_2 A_2 + \ldots + y_m A_m \geq 0,$$

gdzie symbol ≥ 0 oznacza, że macierz stojąca po lewej stronie jest dodatnio półokreślona. Powyżej $y_1, y_2, \ldots, y_m$ są liczbami rzeczywistymi (nieznanymi), a $A_0, A_1 \ldots, A_m$ są ustalonymi (znanymi) macierzami symetrycznymi $n \times n$.

W niektórych zagadnieniach wielkości $y_1, y_2, \ldots, y_m$ są też macierzami symetrycznymi. Przykładowo, równanie Lyapunova (gdzie niewiadomą jest macierz symetryczna P) określające stabilność liniowego równania różniczkowego $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ma postać $0 = A^T P + PA + R$, gdzie R jest dowolną macierzą dodatnio określoną, a więc może być zapisane jako nierówność.

Projektując układ sterowania możemy częstokroć zakładać, że elementy macierzy A zależą od pewnych wielkości, na które mamy wpływ. Czasem, na etapie projektowania, wiemy już, że A zależy od pewnego parametru liczbowego (lub wektorowego) θ (tzn. $A = A(\theta)$), i wtedy chcemy dobrać θ tak, aby właściwości tego układu były w jakimś sensie najlepsze. Ponieważ $x_0^T P x_0$, gdzie x_0 jest warunkiem początkowym równania różniczkowego $\dot{x}(t) = Ax(t)$, określa energię trajektorii tego równania zaczynającej się w x_0, naturalnym wymaganiem jest dobór parametru θ tak, aby była ona w najgorszym przypadku najmniejsza. W wielu sytuacjach modyfikacja macierzy A związana jest z wyborem sprzężenia zwrotnego. Dokładniej, rozpatrujemy równanie $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, gdzie $u(t)$ jest wielkością, którą możemy dobierać (zwaną sterowaniem). Najprostszy $u(t)$ to przyjęcie, że $u(t) := Fx(t)$ (sterowanie przez sprzężenie zwrotne od stanu), gdzie F jest ustaloną macierzą odpowiednich wymiarów. Wybór sprzężenia F minimalizującego sumę energii trajektorii $x(t)$ i sterowania $u(t)$ zwany jest problemem liniowo-kwadratowym. Wskaźnik jakości jest kwadratowy, ograniczenia są liniowe (równania różniczkowe), a więc jest jednym z zadań optymalizacji wypukłej. Traktując sprzężenie F jako wielkość decyzyjną, można to zadanie sprowadzić do zadań, w których ograniczenia mają formę LMI. Można więc wykorzystać tu metody obliczeniowe wypracowane dla zadań półokreślonego programowania (SDP).

Głównym obszarem zastosowań w zakresie teorii sterowania metod związanych z LMI i SDP, jest problem doboru (najlepszych) regulatorów dla układów o nieznanych parametrach (np. zmieniających się w określonym przedziale). Problemy te zostały poruszone w [1, 2, 3]. Ww. metody okazały się również owocne, w analizie pewnych zagadnień finansowych związanych z teorią portfela. Poświęcone są temu prace [4, 5].

W przygotowywanej pracy inżynierskiej postaram się przedstawić następujące zagadnienia:

1. Ogólne właściwości zadań wypukłych,
2. LMI i SDP,
3. Wykorzystanie LMI w teorii sterowania,
4. Wykorzystanie LMI w teorii portfela.

Niektóre z zastosowań będą ilustrowane przykładami numerycznymi.

Literatura

[1] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron i V. Balakrishnan: *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM 1994

[2] A. Ben-Tal: *Conic and Robust Optimization*, University of Rome "La Sapienza" 2002

[3] V. Balakrishnan i L. Vandenberghe: *Semidefinite Programming Duality and Linear Time-invariant Systems*, IEEE Trans. Aut. Contr., AC-48(1):30-41, January 2003

[4] M. S. Lobo i S. Boyd: *The worst-case risk of a portfolio*, Unpublished technical report, September 2000

[5] M. S. Lobo, M. Fazel, S. Boyd: *Portfolio optimization with linear and fixed transaction costs*, Annals of Operations Research, special issue on Financial Optimization, 152(1):376-394, July 2007.

[6] D. G. Luenberger: *Teoria optymalizacji*, PWN 1974

[7] S. Rolewicz: *Analiza funkcjonalna i teoria sterowania*, PWN 1974