Michał Przyłuski (219600) mp.o@wp.pl, GG#292433, wersja 0.8 (20-Oct-04)

Zad. 3:

a) Długość wektora $\overline{a}$ wynosi $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$, a kąt z osią OX jest równy $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. Tak więc we wsp. biegunowych ma on współrzędne: $(\sqrt{5}, \arccos\frac{1}{\sqrt{5}})$.

b) Długość rzutu $\overline{b}$ na XY to $\sqrt{5}$, długość $\overline{b}$ to $\sqrt{1^2+2^2+1^2}=\sqrt{6}$. Cosinus kąta jaki tworzy rzut $\overline{b}$ z płaszczyzną XY jest równy $\frac{1}{\sqrt{5}}$, a z rzutem wektora na oś Z wynosi $\frac{1}{\sqrt{6}}$. Z tego wynika, że wsp. $\overline{b}$ w sferycznym układzie współrzędnych to $(\sqrt{6}, \arccos\frac{1}{\sqrt{6}}, \arccos\frac{1}{\sqrt{5}})$, a w walcowych $(\sqrt{5}, \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}, 1)$.

Zad. 4:

$\overline{e_1}=[1,1,0]\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\overline{e_2}=[1,-1,0]\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\overline{e_3}=[0,1,1]\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\overline{a}=[1,1,1]\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\overline{a}=A\overline{e_1}+B\overline{e_2}+C\overline{e_3}$. Daje to układ:

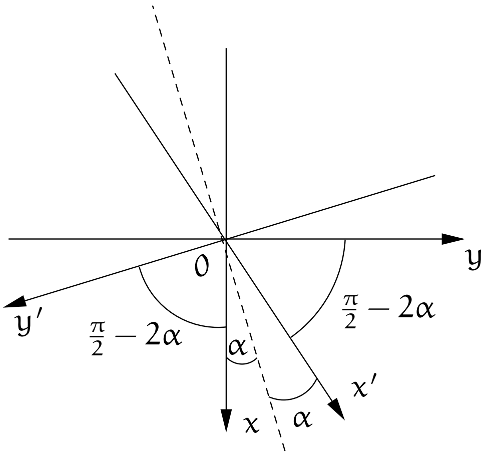
$$\begin{array}{ccccccc} A\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} & + & B\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} & + & C\cdot 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} & = & 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\ A\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} & + & B\cdot -1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} & + & C\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} & = & 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ A\cdot 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} & + & B\cdot 0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} & + & C\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} & = & 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$$

po uproszczeniu: $\begin{cases} A+B=1 \\ A-B+C=1 \\ C=1 \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{2}, B=\frac{1}{2}.C=1,$

więc wektor $\overline{a}$ ma następujące współrzędne w nowej bazie: $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$.

Zad. 5:

Oś OZ się nie zmieni. W wyniku odbicia lustrzanego według zadanej płaszczyny obrotowi ulegną tylko osie OX oraz OY. W przypadku osi OX będzie to kąt 2α zgodnie z ruchem wsk. zegara. Oś OY należy obrócić o $2\alpha-\pi$ w tę samą stronę aby otrzymać OY'. Jednakże do cosinusów kierunkowych



nie wybieramy kątów jakoś wyróżnionych, lecz mniejszy z dwóch, między analizowanymi osiami. Rewolucja polega więc na wzięciu kąta między OY a OY' jako $\pi-2\alpha$, czyli $\cos(\pi-2\alpha)=-\cos(2\alpha)$.

A więc macierz $A=\begin{bmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Co jest macierzą ortogonalną, bo $\det(A)=-\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha=-1$.

Zad. 6:

$$\int\frac{x^4-1}{x-1}dx = \int(x+1)(x^2+1)dx = \int(x^3+x^2+x+1)dx = \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$$

$$\int\frac{x^2-1}{x^2+1}dx=\int\frac{x^2}{x^2+1}dx+\int\frac{-dx}{x^2+1}=\int\frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}dx+\int\frac{-dx}{x^2+1}=$$
$$=\int dx-\int\frac{dx}{x^2+1}-\int\frac{-dx}{x^2+1}=x-2\arctan x+C$$

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{lcl} t & = & x^2 \\ dt & = & 2x\,dx \\ x\,dx & = & \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{1+t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t} = \left| \begin{array}{lcl} u & = & 1+t \\ du & = & dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|1+t| = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C$$

$$\int x^2e^{-x}dx = -x^2e^{-x} - \int xe^{-x}dx = -x^2e^{-x} - (-e^{-x}(x+1) + C) = e^{-x}(-x^2+x+1) + C$$